

ĐỀ KIỂM TRA LƯỢNG GIÁC

Thời gian làm bài: 45 phút

Họ và tên học sinh:

Lớp:

ĐỀ BÀI

- Câu 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\tan x}$.
- Câu 2:** Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2 \cos x + 5$.
- Câu 3:** Giải phương trình: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 4:** Giải phương trình: $\sin x = -\frac{1}{2}$.
- Câu 5:** Tìm chu kỳ của hàm số $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.
- Câu 6:** Tìm m để hàm số $y = \sqrt{2 \cos x - 1 - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.
- Câu 7:** Giải phương trình: $\sin x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- Câu 8:** Giải phương trình: $\tan(x + 30^\circ) = \sqrt{3}$.
- Câu 9:** Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 2 \sin x + x^2$.
- Câu 10:** Một bến cảng có sự thay đổi mực nước h (mét) phụ thuộc vào thời gian t (giờ) trong ngày theo công thức $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 10$. Hỏi mực nước cao nhất trong ngày là bao nhiêu mét và đạt được vào những thời điểm nào trong ngày ($0 \leq t \leq 24$)?

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\tan x}$.

Lời giải:

Hàm số $y = \frac{1}{\tan x} = \cot x$.

Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Mẹo giải: Cần nhớ điều kiện tồn tại của phân thức là mẫu số khác 0 và điều kiện xác định của hàm $\tan x$ (nếu giữ nguyên dạng phân thức, ta cần cả $\cos x \neq 0$ và $\tan x \neq 0$, gộp lại thành $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, tuy nhiên biến đổi $1/\tan x = \cot x$ sẽ nhanh hơn và điều kiện thu gọn là $x \neq k\pi$). Ở đây hàm gốc là $\frac{1}{\tan x}$, ta cần $\cos x \neq 0$ (để $\tan x$ xác định) và $\tan x \neq 0$. Gộp 2 điều kiện $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Do đó tập xác định chính xác là $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- Câu 2:** Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2 \cos x + 5$.

Lời giải:

Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhân hai vế với 2: $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$.

Cộng 5 vào các vế: $-2 + 5 \leq 2 \cos x + 5 \leq 2 + 5$ [cite: 273].

Suy ra: $3 \leq y \leq 7$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [3; 7]$.

Mẹo giải: Xuất phát từ tập giá trị cơ bản của hàm $\sin x, \cos x$ là $[-1; 1]$, sau đó thực hiện các phép biến đổi đại số tương đương để tạo ra dạng của hàm số đề bài.

Câu 3: Giải phương trình: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4}.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ [cite: 273]}.$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Mẹo giải: Sử dụng công thức nghiệm $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi$.

Câu 4: Giải phương trình: $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ [cite: 273]}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ [cite: 273]}.$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Mẹo giải: Ghi nhớ công thức nghiệm $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi$ hoặc $x = \pi - \alpha + k2\pi$.

Câu 5: Tìm chu kỳ của hàm số $y = \tan \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải:

Hàm số $y = \tan(ax + b)$ có chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Ở đây $a = 3$, nên chu kỳ của hàm số là $T = \frac{\pi}{3}$.

Mẹo giải: Chỉ cần nhớ công thức chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$ đối với hàm $\tan, \cot$ và $T = \frac{2\pi}{|a|}$ đối với hàm $\sin, \cos$. Các hệ số tự do (như $\frac{\pi}{3}$) không ảnh hưởng đến chu kỳ.

Câu 6: Tìm m để hàm số $y = \sqrt{2 \cos x - 1 - m}$ **xác định trên** $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 - m \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m \leq 2 \cos x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(x) = 2 \cos x - 1$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m \leq \min f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 2 \cos x - 1 \leq 1.$$

Do đó $\min f(x) = -3$.

Vậy $m \leq -3$.

Mẹo giải: Khi gặp dạng bài "biểu thức $\geq m \quad \forall x$ ", ta cô lập m và đưa về dạng $m \leq \min f(x)$.

Câu 7: Giải phương trình: $\sin x = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải:

Phương trình tương đương: $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ [cite: 273]}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 2x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - x = -\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{12} - k\frac{2\pi}{3}$ và $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Mẹo giải: Sử dụng công thức phụ chéo $\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ để đưa phương trình về cùng hàm $\cos$ (hoặc cùng hàm $\sin$).

Câu 8: Giải phương trình: $\tan(x + 30^\circ) = \sqrt{3}$.

Lời giải:

$$\tan(x + 30^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(x + 30^\circ) = \tan 60^\circ [\text{cite: 273}].$$

$$\Leftrightarrow x + 30^\circ = 60^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy họ nghiệm là $x = 30^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Mẹo giải: Khi phương trình sử dụng đơn vị độ, chu kỳ cộng thêm sẽ là $k180^\circ$ (đối với $\tan, \cot$) thay vì $k\pi$.

Câu 9: Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 2 \sin x + x^2$.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$.

$$\text{Xét } f(-x) = 2 \sin(-x) + (-x)^2 = -2 \sin x + x^2 [\text{cite: 273}].$$

Ta thấy $f(-x) \neq f(x)$ (vì $-2 \sin x + x^2 \neq 2 \sin x + x^2$) và $f(-x) \neq -f(x)$ (vì $-2 \sin x + x^2 \neq -(2 \sin x + x^2)$).

Vậy hàm số $y = 2 \sin x + x^2$ không chẵn, không lẻ.

Mẹo giải: Kiểm tra hai điều kiện: tập xác định có đối xứng không và $f(-x)$ có bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ không.

Câu 10: Một bến cảng có sự thay đổi mực nước h (mét) phụ thuộc vào thời gian t (giờ) trong ngày theo công thức $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 10$. Hỏi mực nước cao nhất trong ngày là bao nhiêu mét và đạt được vào những thời điểm nào trong ngày ($0 \leq t \leq 24$)?

Lời giải:

Mực nước đạt mức cao nhất khi hàm số $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1.

Khi đó $h_{\max} = 3(1) + 10 = 13$ (mét).

Ta giải phương trình: $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) [\text{cite: 273}].$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} + 12k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do thời điểm t xét trong một ngày ($0 \leq t \leq 24$):

$$0 \leq -1.5 + 12k \leq 24 \Leftrightarrow 1.5 \leq 12k \leq 25.5 \Leftrightarrow 0.125 \leq k \leq 2.125.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\}$.

- Với $k = 1 \Rightarrow t = -1.5 + 12(1) = 10.5$ (tương đương 10 giờ 30 phút).

- Với $k = 2 \Rightarrow t = -1.5 + 12(2) = 22.5$ (tương đương 22 giờ 30 phút).

Kết luận: Mực nước cao nhất là 13 mét, đạt được vào lúc 10 giờ 30 phút và 22 giờ 30 phút trong ngày.

Mẹo giải: Đối với bài toán thực tế, sau khi giải họ nghiệm tổng quát chứa k , hãy thế các giá trị nguyên của k để tìm được thời điểm cụ thể phù hợp với điều kiện của bài toán ($0 \leq t \leq 24$).